

Die transversalen galvanomagnetischen Effekte in Halbleitern

Von J. APPEL *

Aus dem Institut für Theoretische Physik der Technischen Hochschule Braunschweig

(Z. Naturforschg. 9a, 167—174 [1954]; eingegangen am 7. September 1953)

In Ergänzung zu einer neueren Arbeit von Whitesell und Johnson¹ werden die transversalen galvanomagnetischen Effekte unter Überlagerung zweier Streumechanismen — Streuung an den thermischen Gitterwellen und an den ionisierten Störatomen — bei beliebigen magnetischen Feldstärken in Abhängigkeit von H , T und den Anteilen der beiden Streumechanismen diskutiert. Dieses führt insbesondere in starken magnetischen Feldern und bei großen Beweglichkeiten der Ladungsträger in Übereinstimmung mit neueren experimentellen Ergebnissen von Estermann und Foner² sowie von Pearson und Suhl³ zu einer wesentlich größeren Widerstandsänderung als nach der älteren Hardingschen Theorie⁴.

Im zweiten Teil werden die entsprechenden Untersuchungen für das Zweibändermodell und eine energieunabhängige freie Weglänge durchgeführt. Es wird auf gewisse Eigentümlichkeiten dieses Modells wie Einfluß der Eigenleitung auf die Widerstandsänderung von Germanium bei Zimmertemperatur und Vorzeichenwechsel der Hall-Konstanten (unter gewissen Voraussetzungen) hingewiesen.

In einer Arbeit von Whitesell und Johnson werden die Effekte unter Berücksichtigung zweier Streumechanismen in schwachen magnetischen Feldern mittels numerischer Rechnungen diskutiert. In der vorliegenden Arbeit werden die entsprechenden Untersuchungen bei beliebigen Feldstärken durchgeführt. Hierbei ergeben sich für starke und schwache Felder analytische Lösungen, mit denen man Widerstandsänderung und Hall-Konstante an Hand tabellierter Funktionen berechnen kann. Nur für mittlere Feldstärken können numerische Rechnungen nicht umgangen werden.

Im zweiten Teil werden durch die Betrachtungen zum Zweibändermodell die teilweise numerischen Ausführungen von Whitesell und Johnson insofern ergänzt, als hier ohne numerische Rechnungen die Effekte bei Überlagerung von Störstellen plus Eigenleitung diskutiert werden. Die genannten Autoren haben den Spezialfall der reinen Eigenleitung ausführlich behandelt.

I. Die galvanomagnetischen Effekte bei gemischter Stoßzeit

1. Die Leitfähigkeit

Zur allgemeinen Formulierung der Leitfähigkeit werden die üblichen Voraussetzungen, wie Max-

wellsche Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen usw. getroffen. Es ist die gemischte Stoßzeit $\tau = (\tau_a \tau_b) / (\tau_a + \tau_b)$. Dabei ist $\tau_b = 1/bTv$ die Stoßzeit infolge Wechselwirkung der Elektronen mit den thermischen Gitterwellen und $\tau_a = a/v^3$ die Stoßzeit infolge Streuung an den ionisierten Störatomen. a und b sind temperaturunabhängige Konstanten eines bestimmten Halbleiters. Im Gegensatz zu b ist a von der Störstellenkonzentration abhängig.

Mit dieser gemischten Stoßzeit τ erhält man nach Lösung der statistischen Fundamentalgleichung für die elektrische Leitfähigkeit in Richtung des äußeren Feldes

$$\sigma = A \alpha^4 \left\{ L_1 + 4\gamma \frac{(L_2)^2}{L_1} \right\}. \quad (1)$$

Dabei sind, im Hinblick auf eine analytische Behandlung der Leitfähigkeitsintegrale in den Grenzfällen (schwache und starke Felder) und eine möglichst einfache numerische Behandlung im allgemeinen Fall, die Integralparameter α (im wesentlichen Temperaturparameter) und γ (im wesentlichen Feldstärkeparameter) so gewählt, daß L_1 und L_2 in folgender Weise definiert sind:

$$L_1 = \int_0^\infty \frac{(1+z^2)z^3 e^{-\alpha z}}{(1+z^2)^2 + \gamma z^3} dz;$$

* Braunschweig, Comeniusstr. 37.

¹ W. S. Whitesell u. V. A. Johnson, Physic. Rev. **89**, 941 [1953].

² I. Estermann u. A. Foner, Physic. Rev. **79**, 366 [1950].

³ L. G. Pearson u. H. Suhl, Physic. Rev. **83**, 768 [1950].

⁴ J. W. Harding, Proc. Roy. Soc. [London], Ser. A **140**, 205 [1933].



$$L_2 = \int_0^\infty \frac{w^{10} e^{-\alpha w^2}}{(1+w^4)^2 + \gamma w^6} dw;$$

$$\alpha = \frac{m}{2kT} \frac{1}{\sqrt{a} b T}; \quad \gamma = \frac{\mu^2 a^2}{(a b T)^{3/2}};$$

$$\mu = \frac{eH}{mc}; \quad A = \frac{2\pi}{3} a \frac{e^2}{kT} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \left(\frac{2kT}{m} \right)^4.$$

a) Leitfähigkeit und Beweglichkeit für $H = 0$. Dann ist

$$\sigma = \sigma_0 = A \alpha^4 L_1^{(0)}; \quad L_1^{(0)} = L_1(\alpha, \gamma = 0).$$

Das Integral $L_1^{(0)}$ ist unter Berücksichtigung der Theorie der Integrallogarithmen geschlossen darstellbar

$$L_1^{(0)} = \frac{1}{\alpha^2} \{1 + \alpha^2 (\sin \alpha \operatorname{si} \alpha + \cos \alpha \operatorname{ci} \alpha)\},$$

si = Integralsinus, ci = Integralcosinus.

Damit ist die Leitfähigkeit ohne Magnetfeld

$$\sigma_0 = \frac{4a}{3\sqrt{\pi}} \frac{e^2 n}{m} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{3/2} \cdot \{ \alpha^2 + \alpha^4 (\sin \alpha \operatorname{si} \alpha + \cos \alpha \operatorname{ci} \alpha) \}. \quad (2)$$

Führt man in (2) den Grenzübergang $\alpha \rightarrow \infty$ durch, so erhält man die Leitfähigkeit σ_a , die der alleinigen Wechselwirkung der Elektronen mit den ionisierten Störatomen entspricht

$$\sigma_a = \frac{8a}{\sqrt{\pi}} \frac{e^2 n}{m} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{3/2};$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \{ \alpha^2 + \alpha^4 (\sin \alpha \operatorname{si} \alpha + \cos \alpha \operatorname{ci} \alpha) \} = \Gamma(4). \quad (2a)$$

Für den anderen Grenzfall $\alpha \rightarrow 0$ liefert (2) die Leitfähigkeit σ_b , die nur die Streuung der Elektronen an den thermischen Gitterwellen berücksichtigt

$$\sigma_b = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^2 n}{m} \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{1}{b T^{1/2}}. \quad (2b)$$

Mit (2a) und (2b) sieht man, daß der oben eingeführte Integralparameter α eine einfache Bedeutung hat: $\alpha^2 = 6 \sigma_b / \sigma_a = 6 \varrho_a / \varrho_b$.

Die Beweglichkeit B erhält man aus (2), wenn man berücksichtigt, daß allgemein gilt $\sigma_0 = n e B$. Das Maximum der Beweglichkeit, das etwa bei $\alpha = 2,5$ [$\varrho_a / (\varrho_a + \varrho_b) = 0,5$] liegt, verschiebt sich mit abnehmender Störstellenkonzentration, d.h. wachsendem a , nach tieferen Temperaturen. Kennt man die Temperaturabhängigkeit der Beweglichkeit für einen bestimmten Halbleiter, so können für denselben die charakteristischen Konstanten a und b durch Vergleich von gemessener und berechneter Beweglichkeit ermittelt werden. $a \cdot b$ geht in die Abszisse und a/b in die Ordinate der Beweglichkeitskurve als Proportionalitätskonstante ein.

b) Die Widerstandsänderung. Diese ist mit den obigen Definitionen nach (1) und (2) in der Form darstellbar:

$$\frac{\Delta \sigma}{\sigma_0} = - \frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_0} = 1 - \frac{L_1 + 4\gamma \frac{(L_2)^2}{L_1}}{L_1^{(0)}}. \quad (3)$$

Im Grenzfall starker und schwacher Felder kann (3) auf integrallose Darstellungen zurückgeführt werden.

α) *Schwache Felder*. Dann dürfen die Reihenentwicklungen für die Parameterintegrale

$$L_i(\alpha, \gamma) = L_i^{(0)}(\alpha) - \gamma L_i^{(1)}(\alpha) + \dots \quad (i = 1, 2)$$

nach dem zweiten Grad abgebrochen werden ($\gamma \sim H^2$). Damit ist die relative Widerstandszunahme in schwachen Feldern

$$\frac{\Delta \sigma}{\sigma_0} = \gamma \frac{L_1^{(1)} - 4 \frac{(L_2^{(0)})^2}{L_1^{(0)}}}{L_1^{(0)}} = \gamma f(\alpha). \quad (4)$$

Das Parameterintegral $L_1^{(1)}$ läßt sich durch partielle Integration auf Integrale zurückführen, die durch Integrallogarithmen darstellbar sind

$$L_1^{(1)} = \frac{1}{8} \left\{ \frac{8}{\alpha} - \alpha + (\alpha^2 - 15) (\sin \alpha \operatorname{ci} \alpha - \cos \alpha \operatorname{si} \alpha) - 9\alpha (\sin \alpha \operatorname{si} \alpha + \cos \alpha \operatorname{ci} \alpha) \right\}.$$

Das Integral $L_2^{(0)}$ läßt sich über eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit α als unabhängiger Veränderlicher lösen

$$L_2^{(0)} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left\{ \frac{1}{\alpha^{3/2}} + \sqrt{\alpha} - \frac{7}{2} \sqrt{2\pi} \left[\sin \alpha \left(\frac{1}{2} - S(\alpha) \right) + \cos \alpha \left(\frac{1}{2} - C(\alpha) \right) \right] \right. \\ \left. - \alpha \sqrt{2\pi} \left[\cos \alpha \left(\frac{1}{2} - S(\alpha) \right) - \sin \alpha \left(\frac{1}{2} - C(\alpha) \right) \right] \right\};$$

$S(\alpha)$ und $C(\alpha)$ sind die in üblicher Weise (Jahnke-Emde) definierten Fresnelschen Integrale.

β) *Starke Felder.* Zur Untersuchung der Effekte bei großen Feldstärken werden die L_i nach negativen Potenzen von H bzw. γ entwickelt

$$L_i(\alpha, \gamma) = \frac{1}{\gamma} \overline{L}_i^{(1)} - \frac{1}{\gamma^2} \overline{L}_i^{(2)} + \dots \quad (i = 1, 2).$$

Für den besonders interessierenden Sättigungswert der Widerstandsänderung im $\lim H \rightarrow \infty$ brauchen jeweils nur die ersten Glieder der Reihenentwicklungen berücksichtigt werden. Mit

$$\overline{L}_1^{(1)} = \frac{1}{\alpha} \left(1 + \frac{2}{\alpha^2} \right); \quad \overline{L}_2^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\alpha^{5/2}}$$

erhält man

$$\lim_{H \rightarrow \infty} \frac{\Delta \sigma}{\sigma_0} = 1 - \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)^2}{(\alpha^2 + 2) \{1 + \alpha^2 (\sin \alpha \operatorname{Si} \alpha + \cos \alpha \operatorname{Ci} \alpha)\}}. \quad (5)$$

Durch den Grenzübergang $\alpha \rightarrow \infty$ bekommt man den Sättigungswert der relativen Widerstandszunahme für den Fall, daß die Elektronen nur an den ionisierten Störatomen gestreut werden:

$$\lim_{H \rightarrow \infty} \frac{\Delta \sigma}{\sigma_0} = 0,7056 \quad \text{oder} \quad \lim_{H \rightarrow \infty} \frac{\Delta \varrho}{\varrho_0} = 2,496. \quad (5a)$$

Für den anderen Grenzfall $\alpha \rightarrow 0$ liefert (5) den Sättigungswert der Hardingschen Theorie:

$$\lim_{H \rightarrow \infty} \frac{\Delta \sigma}{\sigma_0} = 0,117 \quad \text{oder} \quad \lim_{H \rightarrow \infty} \frac{\Delta \varrho}{\varrho_0} = 0,132. \quad (5b)$$

2. Diskussion der Widerstandsänderung bei gemischter Stoßzeit

Die Widerstandsänderung läßt sich in allen Feldstärkebereichen als Funktion des Abszissenparameters γ und des Kurvenparameters α darstellen. Um $\frac{\Delta \sigma}{\sigma_0}$ oder $\frac{\Delta \varrho}{\varrho_0} = \frac{\Delta \sigma / \sigma_0}{1 - \Delta \sigma / \sigma_0}$ als Funktion der Feldstärke H mit einer temperaturunabhängigen Abszisse zu erhalten (γ ist sowohl von H als auch von T abhängig) wird berücksichtigt, daß α und γ durch die Temperatur gekoppelt sind. Daher ist $\alpha_1(T_1) : \alpha_2(T_2) = (\mu_1)^2 : (\mu_2)^2$, wenn $\gamma = \text{const}$ ist. Wird also für ein gewisses α^* — d. h. bei einem bestimmten Halbleiter (a und b fest) für eine bestimmte Temperatur T^* — der Abszissenmaßstab vorgegeben, so erhält man den Abszissenmaßstab für alle anderen α -Werte eindeutig aus obiger Gleichung. Danach gehört zu beliebigen Parameterkombinationen α, γ der Feldstärkeparameter

$$\mu = \frac{(abT^*)^{3/4}}{a} \sqrt{\frac{\alpha^* \gamma}{\alpha}} = C \sqrt{\frac{\alpha^* \gamma}{\alpha}}.$$

Die Bestimmung der Konstanten C und damit die vollständige Normierung des Abszissenmaßstabes kann erfolgen, wenn für eine der Versuchstemperaturen, bei denen die Widerstandsänderung gemessen ist, ein entsprechendes $\alpha^*(T^*)$ definiert wird. Es ist in den Abb. 1 und 2 der Abszissenmaßstab für $\alpha^* = 30$ vorgegeben.

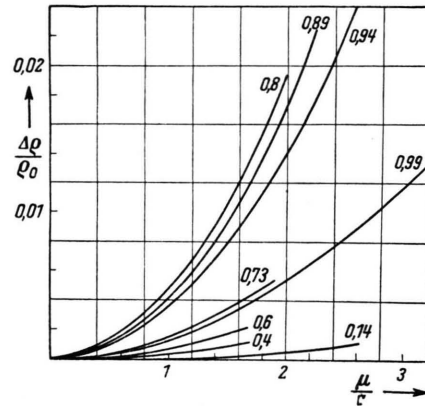


Abb. 1. Die Widerstandsänderung $\Delta \varrho / \varrho_0$ bei gemischter Stoßzeit in schwachen Feldern. Als Abszisse ist der dimensionslose Parameter μ/C aufgetragen: $\mu = eH/mc$. C ist eine Normierungskonstante; sie ist hier für die zu $\alpha = 30$ ($= \alpha^*$) gehörige Versuchstemperatur eines bestimmten Halbleiters (a und b fest) vorgegeben

$$C = \left[\frac{(abT)^{3/4}}{a} \right]_{\alpha^* = 30}.$$

Der Kurvenparameter ist $\varrho_a / (\varrho_a + \varrho_b)$.

Abb. 1 zeigt die relative Widerstandszunahme $\Delta \varrho / \varrho_0$ in schwachen Feldern. Für die Parameterwerte $\alpha = 0,5; 1; 2; 3; 4; 5; 7; 10; 30$ ist $f(\alpha)$ mittels tabellierter Funktionen berechnet. Die Widerstands-

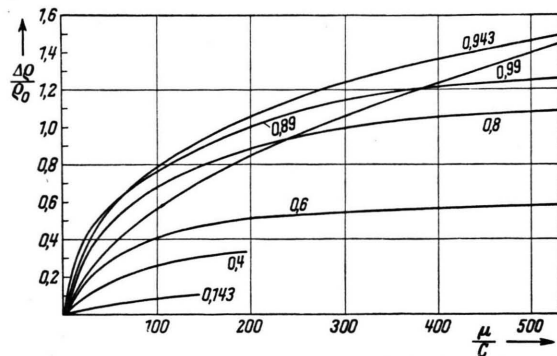


Abb. 2. Die Widerstandsänderung $\Delta \varrho / \varrho_0$ in Abhängigkeit von der magnetischen Feldstärke $\mu = eH/mc$. C ist eine Normierungskonstante (s. Abb. 1). Der Abszissenparameter μ/C ist dimensionslos. Als Kurvenparameter ist $\varrho_a / (\varrho_a + \varrho_b)$ angegeben.

änderung hat ein Maximum bei $q_a/(q_a + q_b) = 0,8$ ($\alpha \approx 5$). Die Kurven sind bei verschiedenen Feldstärken abgebrochen, um anzudeuten, daß der Bereich der quadratischen Widerstandsänderung von α abhängt. Abb. 2 zeigt die Widerstandsänderung bei beliebigen Feldstärken. Sämtliche Kurven gehen asymptotisch gegen einen Sättigungswert, den man aus Abb. 3 ersehen kann. Aus Abb. 3 erkennt man ferner, daß sich das Maximum der Widerstandsänderung bei konstanter Feldstärke (diese ist Kurvenparameter in Abb. 3) mit zunehmender Feldstärke nach größeren $q_a/(q_a + q_b)$ -Werten verschiebt — d. h. bei einem bestimmten Halbleiter nach tieferen Temperaturen — und schließlich in starken Feldern bei $q_a/(q_a + q_b) = 1$ liegt. Das Minimum der Sättigungskurve in Abb. 3, das bei

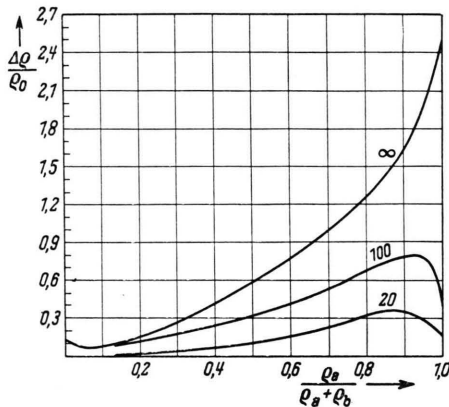


Abb. 3. Die Widerstandsänderung $\Delta Q/Q_0$ in Abhängigkeit von $q_a/(q_a + q_b)$ mit $\mu/C = \text{const}$ ($H = \text{const}$) als Kurvenparameter. Die Kurve mit $\mu/C = \infty$ gibt den Sättigungswert der Widerstandsänderung in Abhängigkeit von den Anteilen der beiden Streumechanismen an.

$\alpha \approx 0,07$ liegt, weist darauf hin, daß die Widerstandsänderung bei größeren Feldstärken im Bereich der Zimmertemperatur kleiner ist als nach Harding.

3. Die Hall-Konstante

Diese ist für die gemischte Stoßzeit im Grenzfall des verschwindenden Magnetfeldes von Lark-Horowitz⁵ berechnet. Es soll hier die Hall-Konstante bei beliebigen magnetischen Feldstärken für einige Parameterwerte α, γ angegeben werden; sie ist

$$R = \frac{1}{nec} \frac{3\sqrt{\pi}}{2\alpha^{5/2}} \frac{L_2}{(L_1)^2 + 4\gamma(L_2)^2} \quad (6)$$

⁵ K. Lark-Horowitz u. V. A. Johnson, *Physic. Rev.* **83**, 176 [1950].

Diese Darstellung für die Hall-Konstante bei beliebiger Feldstärke läßt sich in den Grenzfällen schwacher und starker Felder auf integrallose Darstellungen zurückführen. Abb. 4 zeigt die Feldstärkeabhängigkeit der Hall-Konstanten, wie sie

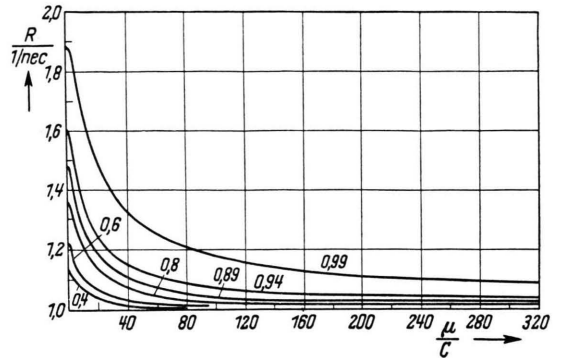


Abb. 4. Die Hall-Konstante bei gemischter Stoßzeit in Abhängigkeit von der magnetischen Feldstärke, $\mu = eH/mc$. C ist eine Normierungskonstante (s. Abb. 1). Der Kurvenparameter ist $q_a/(q_a + q_b)$.

mittels numerisch berechneter Werte der L_i nach (6) ermittelt wurde. In schwachen Feldern ist R quadratisch von H abhängig, in starken Feldern hat R unabhängig vom Wert des Kurvenparameters $q_a/(q_a + q_b)$ den asymptotischen Wert

$$\lim_{H \rightarrow \infty} R = \frac{1}{nec}.$$

II. Die galvanomagnetischen Effekte für das Zweibändermodell

Eine weitere Ursache für eine erheblich größere Widerstandsänderung als nach der Hardingschen Theorie ist die gemischte Leitung. Setzt man das Zweibändermodell und eine energieunabhängige freie Weglänge voraus, so ist $\Delta Q/Q_0$ eine Funktion von H, T , des Verhältnisses Elektronenkonzentration n_1 im L-Band zu Lochelektronenkonzentration n_2 im V-Band und des entsprechenden Beweglichkeitsverhältnisses $B_1:B_2$. Für den Spezialfall $n_1 = n_2$, d. h. reine Eigenleitung haben Whitesell und Johnson¹ die Widerstandsänderung berechnet.

1. Die Leitfähigkeit

Der Leitmechanismus ohne Magnetfeld ist für das Zweibändermodell bei alleiniger Streuung der Elektronen an den Gitterwellen von Fröhlich⁶ be-

⁶ H. Fröhlich, *Elektronentheorie der Metalle*, Berlin 1936.

handelt. Danach wird für die Stoßzeit eines Elektrons aus dem L-Band $\tau_1 = 1/b_1 T v$ und für die eines Lochelektrons aus dem V-Band $\tau_2 = 1/b_2 T v$ angenommen. Mit diesen Stoßzeiten erhält man bei denselben allgemeinen Voraussetzungen wie in (1) für die Leitfähigkeit

$$\sigma(H, T, n_1, n_2, b_1, b_2) = A \frac{n_1}{b_1 T} \frac{\left(J_1 + \frac{n_2 b_1}{n_1 b_2} J_2\right)^2 + \left(\frac{\mu}{b_1 T}\right)^2 \left(\bar{J}_1 - \frac{n_2 b_1^2}{n_1 b_2^2} \bar{J}_2\right)^2}{J_1 + \frac{n_2 b_1}{n_1 b_2} J_2}; \quad (7)$$

dabei sind die Definitionen getroffen

$$A = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \frac{e^2}{kT} \text{ und für } i=1,2$$

$$J_i = \int_0^\infty \frac{v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}}{1 + \left(\frac{\mu}{b_i T v}\right)^2} dv, \quad \bar{J}_i = \int_0^\infty \frac{v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}}{1 + \left(\frac{\mu}{b_i T v}\right)^2} dv.$$

2. Die Widerstandsänderung

a) *Schwache Felder.* Dann dürfen die Integralentwicklungen nach dem H^2 -Glieder abgebrochen werden:

$$J_i = \frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m}\right)^2 (1 - \beta_i^2),$$

$$\bar{J}_i = \frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m}\right)^{3/2} \left(\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \beta_i^2\right),$$

wobei $\beta_i = \frac{\mu}{b_i T} \sqrt{\frac{m}{2kT}} \quad (i=1,2)$.

$\beta_i = 0$ liefert die Leitfähigkeit ohne Magnetfeld:

$$\sigma_0 = \frac{e^2}{m} \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2m}{\pi k}} \frac{n_1}{b_1 T^{1/2}} \left(1 + \frac{n_2 b_1}{n_1 b_2}\right);$$

$$b_1 : b_2 = B_2 : B_1. \quad (8)$$

Unter Berücksichtigung der obigen Integralentwicklungen ist die Widerstandsänderung in schwachen Feldern nach (7) und (8)

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma_0} = \frac{\beta_1^2}{\left(1 + \frac{n_2 B_2}{n_1 B_1}\right)^2} \left\{ \left(1 + \frac{n_2 B_2}{n_1 B_1}\right) \left(1 + \frac{n_2 B_2^3}{n_1 B_1^3}\right) - \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{n_1 B_2^2}{n_2 B_1^2}\right) \right\}. \quad (9)$$

b) *Beliebige Feldstärken.* Dann können die Integrale ohne Ausnahme durch tabellierte Funktionen dargestellt werden:

$$J_i = \frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m}\right)^2 (1 - \beta_i^2 - \beta_i^4 e^{\beta_i^2} E_i(-\beta_i^2)),$$

$$\bar{J}_i = \frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m}\right)^{3/2} \left(\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \beta_i^2 + \pi \beta_i^2 e^{\beta_i^2} (1 - \Phi(\beta_i))\right), \quad (i=1,2).$$

$E_i(-x)$ und $\Phi(x)$ sind in üblicher Weise definiert (s. Jahnke-Emde). Mit diesen Funktionen läßt sich die Widerstandsänderung nach (7) und (8) einfach errechnen.

c) *Starke Felder.* Entwicklung der Integrale nach negativen Potenzen von H liefert bei alleiniger Berücksichtigung der zwei ersten Glieder:

$$J_i = \frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m}\right)^2 \frac{1}{\beta_i^2} \left(\Gamma(3) - \frac{\Gamma(4)}{\beta_i^2}\right);$$

$$\bar{J}_i = \frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m}\right)^{3/2} \frac{1}{\beta_i^2} \left(\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\beta_i^2}\right) \quad (i=1,2).$$

Einsetzen in (7) liefert mit (8) die Widerstandsänderung in starken Feldern. Hieraus wird im Grenzübergang

$$\lim_{H \rightarrow \infty} \frac{\Delta\sigma}{\sigma_0} = 1 - \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right)^2}{\Gamma(3) \left(1 + \frac{n_2 B_2}{n_1 B_1}\right) \left(1 + \frac{n_2 B_1}{n_1 B_2}\right)}. \quad (10)$$

3. Diskussion der Ergebnisse

Die Widerstandsänderung bei gemischter Leitung kann in allen Feldstärkebereichen als Funktion des Abszissenparameters $\beta_1 = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \frac{B_1 H}{c}$ dargestellt werden. Sie ist außerdem von den beiden Kurvenparametern $n_1 : n_2$ und $B_1 : B_2$ abhängig. Hinsichtlich des zweiten Kurvenparameters wird die relative Widerstandszunahme für die zwei Fälle

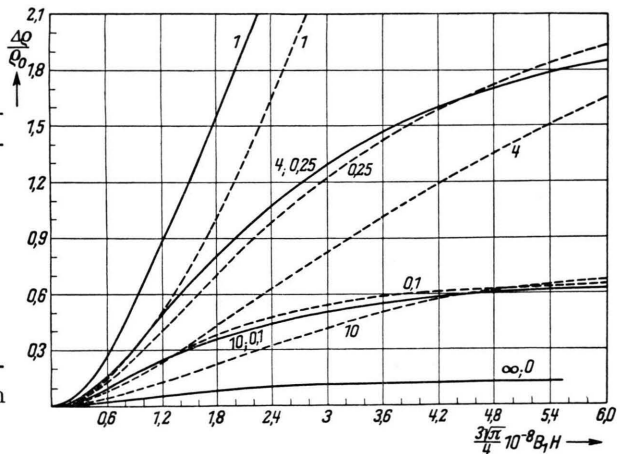


Abb. 5. Die relative Widerstandszunahme $\Delta\sigma/\sigma_0$ ($H, T, n_1/n_2, B_1/B_2$) bei gemischter Leitung. B_1 = Elektronenbeweglichkeit, B_2 = Lochelektronenbeweglichkeit, n_1 = Elektronenkonzentration, n_2 = Lochelektronenkonzentration. Der Kurvenparameter ist n_1/n_2 . — $B_1 = B_2$, - - - $B_1 = 2 B_2$. H in [Gauß]; B_1 in [$\text{cm}^2 \text{ Volt}^{-1} \text{ sec}^{-1}$].

$B_1 = B_2$ und $B_1 = 2B_2$ diskutiert. Für $n_1:n_2$ werden die Werte: ∞ ; 10; 4; 1; 0,1; 0,25 angenommen. Mit den hiermit möglichen Parameterkombinationen ist $\Delta\varrho/\varrho_0$ in Abb. 5 dargestellt. Es zeigt sich, daß im allgemeinen die Widerstandsänderung erheblich größer ist als nach der Hardingschen Theorie. Für $n_1 \neq n_2$ gehen alle Kurven asymptotisch gegen einen Sättigungswert, der aus Abb. 6 ersehen werden kann. Nur für $n_1 = n_2$ ist im Grenzübergang $H \rightarrow \infty$ $\Delta\varrho/\varrho_0 = \infty$ ($\Delta\sigma/\sigma_0 = 1$), unabhängig vom Beweglichkeitsverhältnis $B_1:B_2$.

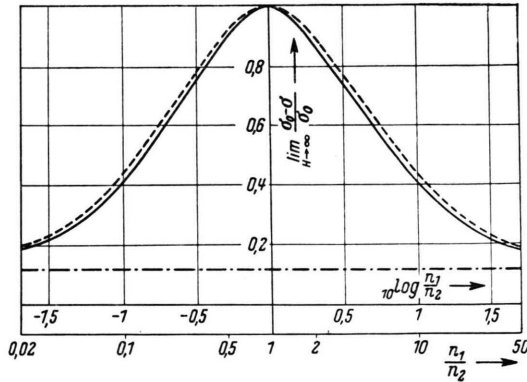


Abb. 6. Der Sättigungswert der relativen Widerstandszunahme $\lim_{H \rightarrow \infty} \Delta\sigma/\sigma_0$ in Abhängigkeit von n_1/n_2 .
 — $B_1 = B_2$, - - - $B_1 = 2B_2$.

Ein wesentliches Ergebnis für die Widerstandsänderung bei gemischter Leitung ist die starke Abhängigkeit von dem Verhältnis der Elektronenkonzentration im L-Band zur Lochelektronenkonzentration im V-Band. Aus Abb. 6 erkennt man, daß die maximale Widerstandsänderung für $n_1:n_2 = 10$, d. h. nur 9% der freien Ladungsträger sind Lochelektronen, schon fünf- bis sechsmal so groß ist als für das Einbändermodell. Eine praktische Nutzanwendung dieser Tatsache liegt in der Abschätzung des Einflusses der Eigenleitung auf die Widerstandsänderung bei Zimmertemperatur. Es mögen ϱ_E der Eigenleitungswiderstand und ϱ_{E+D} der wirklich gemessene Widerstand bei 300° K sein. Dann ist der interessierende Parameter $n_1:n_2$

$$\frac{n_1}{n_2} = 1 + \frac{B_1 + B_2}{B_1} \left(\frac{\varrho_E}{\varrho_{E+D}} - 1 \right).$$

Hier sollen die speziellen Werte einer sehr reinen Germaniumprobe eingesetzt werden ($T = 300^\circ \text{ K}$):

$$B_1 = 3600 [\text{cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ sec}^{-1}], \quad \varrho_E = 60 [\Omega \text{ cm}];$$

$$B_2 = 1700 [\text{cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ sec}^{-1}], \quad \varrho_{E+D} = 10 [\Omega \text{ cm}].$$

Damit ist $B_1:B_2 \approx 2,1$ und $n_1:n_2 \approx 8,5$. Diesen Parameterwerten entspricht eine maximale Widerstandsänderung $\lim_{H \rightarrow \infty} \frac{\Delta\varrho}{\varrho_0} \approx 65\%$, die etwa fünfmal so groß ist wie der Hardingsche Sättigungswert. Bei mittleren Feldstärken ist dieses Verhältnis kleiner als fünf. Am kleinsten ist es in schwachen Feldern:

$$\frac{\Delta\varrho/\varrho_0}{\Delta\varrho/\varrho_0 (n_2 = 0)} = 1,35.$$

Für die Abhängigkeit der Widerstandsänderung vom Beweglichkeitsverhältnis $B_1:B_2$ (Abb. 5 und 6) gilt allgemein, daß bei konstantem $n_1:n_2$ die Widerstandsänderung um so kleiner ist, je größer das Beweglichkeitsverhältnis $B_1:B_2$ ist.

4. Die Hall-Konstante

$$R = \frac{1}{n_1 e c} \frac{3\pi}{8 \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\overline{J_1'} - \frac{n_2 B_2^2}{n_1 B_1^2} \overline{J_2'}}{\left(J_1' + \frac{n_2 B_2}{n_1 B_1} J_2' \right)^2 + \beta_1^2 \left(\overline{J_1'} - \frac{n_2 B_2^2}{n_1 B_1^2} \overline{J_2'} \right)^2}, \\ J_i' &= \frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m} \right)^2 J_i; \quad \overline{J_i'} = \frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{3/2} \overline{J_i} \quad (i = 1, 2). \end{aligned}$$

Die Entwicklung von (11) für schwache Felder liefert im Grenzfalle des verschwindenden Feldes

$$R(H=0) = R_0 = \frac{3\pi}{8} \frac{1}{n_1 e c} \left(1 - \frac{n_2 B_2^2}{n_1 B_1^2} \right) : \left(1 + \frac{n_2 B_2}{n_1 B_1} \right)^2. \quad (12)$$

Aus der Entwicklung für starke Felder erhält man im Grenzübergang den asymptotischen Wert für R :

$$\left. \begin{array}{l} n_1 > n_2 \\ n_1 < n_2 \end{array} \right\} \lim_{H \rightarrow \infty} R = \frac{1}{n_1 e c} \frac{1}{\left(1 - \frac{n_2}{n_1} \right)}, \quad (13)$$

$$n_1 = n_2: \lim_{H \rightarrow \infty} R = \frac{1}{n_1 e c} \frac{3\pi \Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{8 \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma(3)^2} \left(\frac{B_2}{B_1} - 1 \right).$$

Abb. 7 zeigt die Feldstärkeabhängigkeit der Hall-Konstanten für $B_1 = B_2$ und $B_1 = 2B_2$. Die Kurve mit den Parametern $n_1:n_2 = 0,33$; $B_1 = 2B_2$ wechselt beim Abszissenwert $\beta_1 \approx 0,8$ ihr Vorzeichen. Dieser Vorzeichenwechsel der Hall-Konstanten bei einer bestimmten (nicht unbedingt großen) magnetischen Feldstärke tritt für gewisse Parameter-

werte $n_1 \cdot n_2$ stets dann ein, wenn $B_1 \neq B_2$ ist. Aus (12) und (13) ist leicht zu ersehen, daß für

$$(1) B_1 > B_2 \text{ und } \left(\frac{B_1}{B_2}\right)^2 < \frac{n_1}{n_2} < 1,$$

$$(2) B_1 < B_2 \text{ und } 1 < \frac{n_2}{n_1} < \left(\frac{B_2}{B_1}\right)^2$$

die Hall-Konstante bei einer bestimmten Feldstärke das Vorzeichen wechselt. Im Sonderfall $B_1 = 2 B_2$ tritt dieses dann ein, wenn $0,25 < n_2/n_1 < 1$ ist.

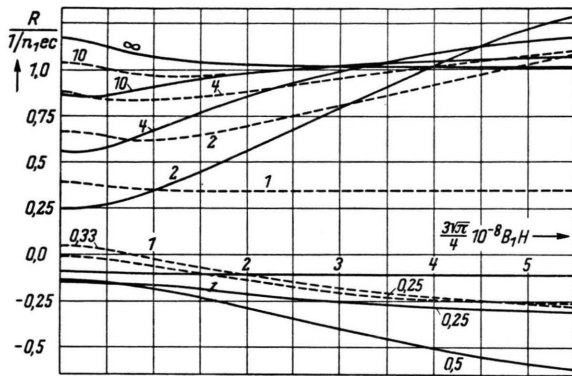


Abb. 7. Die Hall-Konstante bei gemischter Leitung in Abhängigkeit von H und T ($\rightarrow B_1$). Der Kurvenparameter ist n_1/n_2 . — $B_1 = B_2$, --- $B_1 = 2 B_2$. H in [Gauß], B_1 in [$\text{cm}^2 \text{ Volt}^{-1} \text{ sec}^{-1}$].

Vergleich mit der Erfahrung

Die Ergebnisse von (I) und (II) dürfen gemäß ihren Voraussetzungen 1. nur auf gewisse Halbleitertypen und 2. nur auf jeweils beschränkte Temperaturgebiete angewendet werden.

Zu 1. Durch die betrachteten Halbleitermodelle wird die longitudinale Widerstandsänderung nicht erfaßt, weil diese eine Folge der Anisotropie der Elektronenbindung ist. Daher ist zu erwarten, daß man bei Halbleitern mit relativ großem Longitudinaleffekt, wie z. B. n-type-Germanium zu einer guten quantitativen Übereinstimmung mit der Erfahrung erst dann kommt, wenn man die Anisotropie berücksichtigt. Die hier durchgeführten Untersuchungen können daher bis jetzt nur auf p-type-Germaniumproben und das von Pearson und Tanenbaum⁷ untersuchte InSb Anwendung finden.

⁷ L. G. Pearson u. M. Tanenbaum, Physic. Rev. 90, 153 [1953].

Zu 2. Die Untersuchungen in (II) gelten nur für höhere Temperaturen, wo $B \sim T^{-3/2}$ ist. Die untere Grenze des T -Bereiches, auf den (I) Anwendung findet, ist von der Konzentration und der Ionisationsenergie der Störatome abhängig. Für das Beispiel einer p-type-Germaniumprobe mit einer Störstellen-Konzentration von $10^{16} [\text{cm}^3]$ und einer Ionisationsenergie von 0,04 eV findet man bei strenger Berücksichtigung der T -Abhängigkeit der Fermischen Grenzenergie, daß bei 80° K schon etwa 85% aller Störatome dissoziiert sind. Bei den von Estermann und Foner sowie Pearson und Suhl untersuchten Germaniumproben ist eine exakte Berechnung der Ionisationsenergie und damit die Bestimmung von $n(T)$ über $\zeta(T)$ wegen der wenigen Meßpunkte für die Leitfähigkeit nicht möglich. Es zeigen jedoch die aus der Hall-Konstanten gemessenen T -Abhängigkeiten der Ladungsträger-Konzentrationen, daß im allgemeinen bei 77° K etwa 50 bis 90% und oft auch schon bei 20° K mehr als 50% (z. B. p-type-Probe 501, l. c.²) aller Störatome dissoziiert sind.

Beim Vergleich der Meßergebnisse der genannten Autoren für die 77°-Isothermen von p-type-Proben mit den Ergebnissen von (I) findet man in schwachen Feldern verhältnismäßig gute Übereinstimmung. Nimmt man bei dieser Temperatur allein die Wechselwirkung der Elektronen mit den ionisierten Störatomen für die Widerstandsänderung als wesentlich an, so ist dann die von Pearson und Suhl an ihrer p-type-Probe gemessene Widerstandsänderung nur um etwa 28% größer als die berechnete. Nach Harding wäre diese Differenz erheblich größer, weil die Stoßzeit τ_a in schwachen Feldern eine um den Faktor 5,6 größere Widerstandsänderung liefert als τ_b (Streuung an ionisierten Störatomen).

Auch das nach den Ergebnissen von (I) zu erwartende Maximum der Widerstandsänderung in schwachen Feldern ist u. a. bei der Probe 501 beobachtet worden. Bei größeren Feldstärken ist die Widerstandsänderung an einer p-type-Probe nur von Pearson und Suhl gemessen. Dabei fanden diese Autoren bei den größten aufgewandten Feldstärken, wo sich eine Sättigungstendenz erst schwach andeutet, Widerstandsänderungen von etwa 30% bei 77° K. Dieser experimentelle Befund und auch eine noch größere Widerstandsänderung, wie sie nach dem Kurvenverlauf bei der Aufwendung stärkerer Felder zu erwarten wäre, lassen sich nach den Ergebnissen von (I) zumindest qualitativ deuten. Auffallend ist die große gemessene Wider-

standsänderung bei Zimmertemperatur, die im Rahmen dieser Modelle auch bei Berücksichtigung des Einflusses der Eigenleitung auf die Widerstandsänderung nach (II) nicht vollständig erklärt werden kann.

Die große von Pearson und Tanenbaum am InSb bei Zimmertemperatur gemessene Widerstands-

änderung kann nach (II) qualitativ verstanden werden, wenn man annimmt, daß bereits bei Zimmertemperatur infolge des kleinen Bandabstandes Eigenleitung vorliegt.

Abschließend danke ich Herrn Prof. Dr. Kohler herzlich für Anregung und Diskussionen zu dieser Arbeit.

NOTIZEN

Über die innere Umwandlung mit innerer Bremsstrahlung

Von K. Baumann und H. Robl

Institut für theoretische Physik der Universität Wien

(Z. Naturforschg. **9a**, 174 [1954]; eingeg. am 13. Januar 1954)

Brown und Stump¹ haben die bei der inneren Umwandlung auftretende kontinuierliche γ -Strahlung experimentell untersucht und ihre Ergebnisse mit der halbklassischen Formel von Chang und Falkoff^{2*}

$$d\Phi = \frac{\alpha}{2\pi k} \frac{p_{\perp}^2}{(E_p - p_{||})^2} d\Omega_k dk \quad (1)$$

für die Wahrscheinlichkeit der Emission eines Photons der Energie k durch ein plötzlich auf den Impuls p beschleunigtes Elektron verglichen. In (1) bedeutet

$$p_{||} = p \cos \vartheta, \quad p_{\perp} = p \sin \vartheta, \quad (2)$$

wenn ϑ der Winkel zwischen p und k ist, ferner $E_p = (p^2 + 1)^{1/2}$. Die durch (1) gegebene Winkelverteilung entspricht einer starken Bevorzugung der Lichtemission nach vorne. Hingegen konnten Brown und Stump zwischen 90° und 160° keine ausgeprägte Abweichung von der Isotropie feststellen.

Es ist deshalb von Interesse, die Winkelverteilung zu kennen, die sich aus einer strengeren, quantentheoretischen Rechnung ergibt. Wir haben diese Rechnung für einen elektrischen Multipolübergang des Kerns durchgeführt. Es wurde ein K-Elektron betrachtet, welches von dem Übergangselement des elektrostatischen Kernfeldes gestört wird. Vor oder nach dieser Wechselwirkung soll das Elektron ein Lichtquant emittieren. Im Zwischen- und Endzustand wird das Elek-

tron als frei angenommen. Die für den Anfangszustand verwendete Näherung entspricht einem freien, ruhenden Elektron im Normierungsvolumen πa^3 . Als Wahrscheinlichkeit des betrachteten Überganges ergibt sich

$$dw = \frac{32\alpha^2}{a^3} \sum_{l,m} \frac{|p+k|^{2l-2}}{[(2l+1)!!]^2} |Q_{lm}(a, b)|^2 \cdot \frac{p p_{\perp}^2}{E_p - p_{||}} \left(\frac{1}{k} \frac{2 + E_{ab}}{E_p - p_{||}} + 1 + k \right) d\Omega_k dk. \quad (3)$$

$Q_{lm}(a, b)$ bedeutet das elektrische Multipolmoment³ der Ordnung l, m des Atomkerns für den Übergang $a \rightarrow b$, E_{ab} die dabei freiwerdende Energie. Weiter bedeutet

$$(2l+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2l+1). \quad (4)$$

Es ist ersichtlich, daß die Winkelverteilung von (3) für kleine k in die durch (1) gegebene übergeht.

(3) enthält als Faktor die Wahrscheinlichkeit für die innere Umwandlung mit Emission eines Elektrons vom Impulsbetrag $|p+k|$, nämlich³

$$\frac{128\pi\alpha}{a^3} \sum_{l,m} \frac{|p+k|^{2l-3}}{[(2l+1)!!]^2} |Q_{lm}(a, b)|^2. \quad (5)$$

Pro Umwandlungselektron erhält man somit für $k \rightarrow 0$

$$\frac{\alpha}{4\pi k} \frac{p_{\perp}^2}{(E_p - p_{||})^2} (2 + E_{ab}) d\Omega_k dk \quad (6)$$

Lichtquanten.

Bei dem von Brown und Stump untersuchten Prozeß handelt es sich um einen magnetischen Übergang der Ordnung $l = 4$. Eine ausführliche Berechnung, welche auch magnetische Multipolübergänge umfaßt, ist in Vorbereitung.

¹ H.B. Brown u. R. Stump, Physic. Rev. **90**, 1061 [1953].

² C.S.W. Chang u. D.L. Falkoff, Physic. Rev. **76**, 365 [1949].

* Es werden natürliche Einheiten mit $\hbar = c = m = 1$ verwendet.

³ J. Blatt u. V.F. Weisskopf, Theoretical Nuclear Physics, J. Wiley & Sons, New York 1952.